На правах рукописи

Бычков Евгений Викторович

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2013

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,
доцент Замышляева Алена Александровна.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Кадченко Сергей Иванович,
зав. кафедрой Прикладной математики и вычислительной техники,
Магнитогорского государственного университета;

доктор физико-математических наук,
профессор Мустафина Светлана Анатольевна,
зав. кафедрой Математического моделирования,
Стерлитамакского филиала БашГУ.

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет».

Защита состоится 01 октября 2013 года в 13 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан «15» августа 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, доцент А.В. Келлер

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математические модели многих физических процессов и явлений таких, как фильтрация вязкоупругой жидкости, выпучивание двутавровых балок, колебания в молекуле ДНК, распространение волн на мелкой воде, ионно-звуковых волн в плазме, фазовые переходы в рамках мезоскопической теории и др., строятся на основе уравнений соболевского типа, чаще всего нелинейных. Начально-краевые задачи для нелинейных уравнений в большинстве случаев не удается решить аналитически, что актуализирует разработку алгоритмов численного решения физических и технических задач[1]. Так как задача Коши для уравнений соболевского типа является принципиально неразрешимой при произвольных начальных значениях, то при исследовании начально-краевых задач, соответствующих изучаемым моделям, необходимо, прежде всего, установить условия их однозначной разрешимости. Одним из подходов к решению проблемы является метод фазового пространства, разработанный Г.А. Свиридюком и Т.Г. Сукачевой. Под фазовым пространством понимается множество допустимых начальных значений, при которых задача Коши для уравнения соболевского типа будет однозначно разрешима, которое содержит все решения уравнения потраекторно. Изучение фазовых пространств полулинейных уравнений соболевского типа начато в работе Г.А. Свиридюка[2] для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска и продолжено в работах его учеников Т.Г. Сукачевой, Н.А. Манаковой, В.О. Казака, А.Ф. Гильмутдиновой и др. при изучении полулинейных уравнений соболевского типа первого порядка. В диссертационной работе представлены результаты исследования полулинейных математических моделей соболевского типа второго порядка, которые является развитием работ А.А. Замышляевой, посвященных линейным уравнениям соболевского типа высокого порядка. Особенностью данной работы является исследование математических моделей как задач Коши для полулинейных уравнений соболевского типа второго порядка. Уравнения соболевского типа и их приложения изучаются как в России, например, в работах А.И. Кожанова, Г.В. Демиденко, И.В. Мельниковой, А.Г. Свешникова, М.О. Корпусова и др., так и за рубежом

[1] Оптимальные технологические решения для каталитических процессов и реакторов / С.А. Мустафина, Ю.А. Валиева, Р.С. Давлетшин, А.В. Балаев, С.И. Спивак // Кинетика и Катализ. 2005. Т. 40, №5. С. 749–756.

[2] Свиридюк Г. А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска // Изв. вузов. Математика. 1989. № 2. С. 55–61.

в работах A. Favini, A. Yagi. Представим математические модели, исследуемые в работе.

Пусть Ω ограниченная область из $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим *математическую модель распространения волн на мелкой воде*, при условии потенциальности движения и сохранения массы в слое:

$$(\lambda - \Delta)\ddot{u} = \alpha^2 \Delta u + \Delta f(u), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}. \tag{3}$$

Функция $u(x,t)$ определяет высоту волны в момент времени t в точке x. Коэффициенты λ, α связывают глубину, гравитационную постоянную и число Бонда. Уравнение (1) впервые получено J.V. Boussinesque[3]. Математическая модель (1) – (3) рассматривалась в невырожденном случае Д.Г. Архиповым, G. Chen, Sh. Wang и др.

В работе исследуется *математическая модель колебаний в молекуле ДНК:*

$$\begin{matrix} u(x,0) = u_0(x), & \dot{u}(x,0) = u_1(x), \\ v(x,0) = v_0(x), & \dot{v}(x,0) = v_1(x), \end{matrix} \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$u(x,t) = v(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$\begin{cases} (b + \Delta)\ddot{u} = a\Delta u - \Delta f(u,v), \\ (b + \Delta)\ddot{v} = d\Delta v - \Delta g(u,v). \end{cases} \tag{6}$$

Система уравнений Буссинеска (6) при $n = 1$ моделирует колебательные процессы в молекуле ДНК. Коэффициенты $a, b, d \in \mathbb{R}$ связывают размеры молекулы, линейную плотность и силу межмолекулярного взаимодействия, функции u и v определяют продольную и поперечную деформации. Данная математическая модель была предложена P.L. Christiansen[4].

Математические модели (1) – (3), (4) – (6) роднит тот факт, что они в подходящим образом выбранных банаховых пространствах сводятся к задаче Коши

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1, \tag{7}$$

[3]Boussinesque, J.V. Essai sur la théorie des eaux courantes// Mém. Pésentés Divers Savants Acad. Sci. Inst. France. 1877. № 23. P. 1–680.

[4]Cristiansen P.L., Muto V., Lomdahl P.S. On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom// Nonlinearity. 1990. №4. P. 477–501.

для неполного полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка

$$L\ddot{u} = Mu + N(u), \tag{8}$$

где $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ – банаховы пространства. Результаты о разрешимости задачи (7), (8), полученные в диссертации, применимы для исследования этих математических моделей.

В работе также рассматривается математическая модель *Буссинеска – Лява продольных колебаний в упругом стержне с учетом инерции:*

$$(\lambda - \Delta)\ddot{u} = \alpha(\Delta - \lambda')\dot{u} + \beta(\Delta - \lambda'')u + \Delta f(u), \tag{9}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{10}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = u_1(x). \tag{11}$$

Функция $u(x,t)$ характеризует продольное смещение, параметры $\alpha, \beta, \lambda, \lambda', \lambda''$ – свойства материала, из которого изготовлен стержень, и связывают между собой плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент упругости. Необходимо отметить, что это неединственная интерпретация задачи (9) – (11). Если $f(u) = u^3$, то уравнение (9) называется damped IMBq, оно описывает распространение затухающих волн на мелководье, причем α – коэффициент гидродинамического сопротивления среды. А.А. Замышляева рассматривала уравнение (9) в линейном случае, G. Chen - только в невырожденном. В одной из работ А.П. Солдатова отмечено, что задача (9) – (11) неразрешима при произвольных значениях λ и $u_0(x), u_1(x)$. В диссертационном исследовании получены достаточные условия однозначной разрешимости данной задачи.

Математическая модель (9) – (11) исследуется с помощью редукции к задаче Коши (7) для уравнения соболевского типа

$$A\ddot{u} = B_1\dot{u} + B_0u + N(u), \tag{12}$$

где операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

В работе указанные математические модели рассмотрены не только с условиями Коши, но и с условиями Шоуолтера - Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \quad P(\dot{u}(0) - u_1) = 0, \tag{13}$$

где P - некоторый спектральный проектор. Условия (13) задают проекции решений в начальный момент времени. Условия Шоуолтера – Сидорова предпочтительнее при проведении вычислительного эксперимента, так как не возникает необходимости проверки принадлежности начальных значений фазовому пространству уравнения. Более того условия Шоуолтера – Сидорова обобщают условия Коши и являются более естественными для уравнений соболевского типа[5].

Целью работы является исследование математических моделей распространения волн на мелкой воде, колебаний в молекуле ДНК и продольных колебаний в упругом стержне на основе уравнений соболевского типа с последующей разработкой алгоритмов методов численного решения и программ. Для достижения данной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Разработать метод исследования математических моделей, основанных на полулинейных уравнениях соболевского типа второго порядка;
2. Исследовать математическую модель распространения волн на мелкой воде как задачу Коши для неполного полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка;
3. Исследовать математическую модель колебаний в молекуле ДНК как задачу Коши и задачу Шоуолтера – Сидорова для неполного полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка;
4. Исследовать математическую модель Буссинеска – Лява как задачу Коши и задачу Шоуолтера – Сидорова для полного полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка;
5. Разработать и реализовать в виде программ для ЭВМ алгоритмы методов численного решения задачи Шоуолтера – Сидорова – Дирихле для системы уравнений Буссинеска и полулинейного уравнения Буссинеска – Лява.

Научная новизна. Математические модели распространения волн на мелкой воде, колебаний в молекуле ДНК, продольных колебаний в упругом стержне исследованы с помощью разработанного метода, заключающегося в редукции математической модели к задаче Коши (Шоуолтера – Сидорова) для полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка. Доказано существование единственного локального решения соответствующих указанным моделям задач. Получены достаточные условия локальной разрешимости задачи Шоуолтера – Сидорова и задачи Коши для полулинейного уравнения соболев-

[5] Сидоров Н.А. Об одном классе вырожденных уравнений // Мат. заметки. 1984. Т. 25, №4. С. 569–587.

ского типа второго порядка.

Методы исследования. Основным методом исследования является метод редукции конкретных математических моделей к начальным задачам для уравнений соболевского типа второго порядка. При исследовании абстрактных уравнений применяется метод фазового пространства, заключающийся в редукции сингулярного уравнения к регулярному определенному на множестве допустимых начальных значений. При разработке алгоритмов численных методов используется модифицированный метод Галеркина и метод Рунге – Кутта.

Теоретическая и практическая значимость. Постановка задачи Шоуолтера – Сидорова в перечисленных моделях расширяет применимость разработанных алгоритмов численных методов. Полученные достаточные условия разрешимости полного и неполного полулинейного уравнения соблевского типа второго порядка развивают теорию уравнений соболевского типа. Построены и реализованы алгоритмы решения задачи Шоуолтера – Сидорова – Дирихле (Коши – Дирихле) для системы уравнений Буссинеска и для уравнения Буссинеска – Лява, позволяющие получать численное решение и наглядное представление о поведении решения в графическом виде. Результаты, полученные при исследовании математической модели распространения волн на мелкой воде, полезны в гидродинамике, в геологии при изучении фильтрации воды в почве. Результаты исследования математической модели колебаний в молекуле ДНК применимы в биоинженерии и биологии, математической модели Буссинеска – Лява – в теории упругости, гидродинамике и электродинамике.

Апробация работы. Результаты работы апробированы на конференциях: Всероссийской конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" (г. Самара, 2011), Международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (г. Екатеринбург, 2011), Зимней воронежской математической школе (г. Воронеж, 2012), Четвертой конференции аспирантов и докторантов ЮУрГУ (Челябинск, 2012), Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева "Обратные и некорректные задачи математической физики" (г. Новосибирск, 2012), Международной научно-практической конференции "Измерения: состояние, перспективы, развитие" (г. Челябинск, 2012). Результаты неоднократно докладывались на областном семинаре, посвященном уравнениям соболевского типа профессора Г.А. Свиридюка, на семинарах кафедр прикладной математики и вычислительной техники МаГУ профессора С.И. Кадченко и математического моделирования Стерлитамакского филиала БашГУ профессора С.А. Мустафиной.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 13 научных работах, в их числе 3 статьи в ведущих российских рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК и 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ. Список работ приводится в конце автореферата. В совместных с научным руководителем работах научному руководителю принадлежит постановка задачи, в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 106 страниц. Список литературы содержит 112 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении приводится постановка задачи, ставится цель исследования, описываются методы исследования и обосновывается актуальность, теоретическая и практическая значимость проведенного исследования.

Первая глава состоит из пяти параграфов. Они содержат определения, теоремы и вспомогательные утверждения, опираясь на которые получены основные результаты исследования. В п. 1.1 приводятся необходимые результаты теории относительно ограниченных операторов[6].

Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ – банаховы пространства, оператор-функции $(\mu L-M)^{-1}$, $R^L_\lambda(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L^L_\lambda(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ называются L-резольвентой, правой и левой L-резольвентами оператора M. Оператор M называется $(L,0)$-*ограниченным*, если его относительный спектр ограничен и ∞ является устранимой особой точкой L-резольвенты оператора M. Вводятся в рассмотрение проекторы $P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\lambda(M)d\lambda, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L^L_\lambda(M)d\lambda$, которые расщепляют пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно.

В п. 1.2 приведены результаты теории относительно полиномиально огра-

[6]Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

ниченных пучков операторов[7]. Оператор-функция $R_\mu^A(\vec{B}) = (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ называется относительной резольвентой пучка $\vec{B}$. Если пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен (относительный спектр пучка $\vec{B}$ ограничен) и ∞ устранимая особая точка A-резольвенты пучка $\vec{B}$, то будем говорить, что пучок операторов $\vec{B}$ $(A,0)$-ограничен. Пусть выполнено условие

$$\int_\gamma R_\mu^A(\vec{B})\,d\mu \equiv 0, \tag{A}$$

где γ – контур, ограничивающий относительный спектр пучка $\vec{B}$, и пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен. Тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^A(\vec{B})\mu A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mu A R_\mu^A(\vec{B}) d\mu$$

являются проекторами в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$. Введем обозначения $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$ и $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} Q$.

П. 1.3 посвящен дифференцируемым банаховым многообразиям. В нем приводятся такие понятия как карта, атлас, банахово C^k-многообразие, касательное расслоение C^k-многообразия, векторное поле и теорема Коши для линейного невырожденного дифференциальное уравнения на гладком банаховом многообразии. В п. 1.4 приводятся теорема Вишика – Минти – Браудера и теорема о неявной функции. В п. 1.5 задаются пространства Соболева, приводятся теоремы вложения Соболева и Реллиха – Кондрашова, теорема о регулярности и свойства эллиптических операторов.

Вторая глава содержит результаты исследования математических моделей распространения волн на мелкой воде и колебаний в молекуле ДНК. В п. 2.1 рассматривается задача (7), (8) и строится фазовое пространство уравнения (8).

Определение. Множество $\mathfrak{P}$ называется фазовым пространством уравнения (8), если
(i) для любых $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (7), (8);
(ii) любое решение $u = u(t)$ уравнения (8) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория, т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при $t \in (-\tau, \tau)$.

[7] Замышляева А.А. Фазовое пространство уравнения соболевского типа высокого порядка // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. "Математика". 2011. Т.4, №4. С. 45–57.

Доказано, что если оператор $M(L,0)$-ограничен и выполнено условие

$$(\mathbb{I}-Q)(M-N'_{u_0}):\mathfrak{U}^0\to\mathfrak{F}^0 \text{ – топлинейный изоморфизм,} \tag{14}$$

то справедлива

Лемма 1. (2.1.1)[8] *Множество* $\mathfrak{M}=\{u\in\mathfrak{U}:(\mathbb{I}-Q)(Mu-N(u))=0\}$ *является* C^∞*-многообразием в точке* u_0.

На основе классической теоремы Коши для уравнения заданного на банаховом многообразии и леммы 1 доказана

Теорема 1. (2.1.1) *Пусть оператор* M $(L,0)$*-ограничен, оператор* $N\in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *и выполнено условие (14). Тогда для любой пары* $(u_0,u_1)\in T\mathfrak{M}$, *существует единственное локальное решение задачи (7), (8), лежащее в* $\mathfrak{M}$ (т.е. множество $\mathfrak{M}$ является локально фазовым пространством уравнения (8)).

В п. 2.2 полученные результаты применяются к исследованию математической модели (4) – (6) колебаний в молекуле ДНК, редуцируемой к задаче (7), (8). Положим

$$w=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\quad w_0=\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix},\quad w_1=\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},$$
$$\mathfrak{U}=\{w\in W_2^{m+2}(\Omega)\times W_2^{m+2}(\Omega):w(x)=0,x\in\partial\Omega\},$$
$$\mathfrak{F}=W_2^m(\Omega)\times W_2^m(\Omega),$$
$$L=\begin{pmatrix}b+\Delta&0\\0&b+\Delta\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}a\Delta&0\\0&d\Delta\end{pmatrix},\ N(w)=\begin{pmatrix}f(u,v)\\g(u,v)\end{pmatrix}.$$

В работе показано, что оператор M является $(L,0)$-ограниченным. Таким образом, доказана

Теорема 2. (2.2.1) *(i) Пусть* $-b\notin\sigma(\Delta)$, $m>n/2-2$. *Тогда для любых* $w_0,w_1\in\mathfrak{U}$ *и некоторого* $\tau=\tau(w_0,w_1)>0$ *существует единственное решение* $w\in C^\infty\big((-\tau,\tau),\mathfrak{U}\big)$ *задачи (4) – (6).*

(ii) Пусть $-b\in\sigma(\Delta)$, $m>n/2-2$ *и выполнено условие (14). Тогда для любых* $(w_0,w_1)\in T\mathfrak{M}$ *и некоторого* $\tau=\tau(w_0,w_1)>0$ *существует единственное решение* $w\in C^\infty\big((-\tau,\tau),\mathfrak{M}\big)$ *задачи (4) – (6).*

В п. 2.3 рассматривается математическая модель колебаний в молекуле ДНК с условиями Шоуолтера – Сидорова

$$\begin{gathered}P(u(x,0)-u_0(x))=0,P(\dot u(x,0)-u_1(x))=0,\\P(v(x,0)-v_0(x))=0,P(\dot v(x,0)-v_1(x))=0.\end{gathered}\tag{15}$$

---

[8] В скобках указана нумерация в диссертации.

В качестве вспомогательной рассмотрена задача (8), (13) и доказана

Теорема 3. (2.3.1) *Пусть оператор* M $(L, 0)$*-ограничен, оператор* $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. *Тогда для любых* $u_0, u_1 \in \mathfrak{U}$ *при выполнении условия (14) существует единственное локальное решение задачи (8), (13).*

На основе теоремы 3 доказана

Теорема 4. (2.3.2) *Если* $m > n/2 - 2$ *и выполнено условие (14), то для любых* $w_0, w_1 \in \mathfrak{U}$ *и некоторого* $\tau = \tau(w_0, w_1) > 0$ *существует единственное решение* $w \in C^\infty\big((-\tau, \tau), \mathfrak{U}\big)$ *задачи (5), (6), (15).*

В п. 2.4 исследуется математическая модель (1) – (3) распространения волн на мелкой воде с учетом капиллярных эффектов. Для ее редукции к задаче (7), (8) положим

$$\mathfrak{U} = \{u \in W_2^{m+2}(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{F} = W_2^m(\Omega),$$
$$L = \lambda - \Delta, \quad M = \alpha^2\Delta, \quad N(u) = \Delta f(u).$$

В работе показана выполнимость условий теоремы 1, и доказана

Теорема 5. (2.4.1) *(i) При любых* $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, $m > n/2 - 2$, $u_0, u_1 \in \mathfrak{U}$ *и некотором* $\tau = \tau(u_0, u_1) > 0$ *существует единственное решение* $u \in C^\infty\big((-\tau, \tau), \mathfrak{U}\big)$ *задачи (1) - (3).*

(ii) Пусть $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $m > n/2 - 2$ *и выполнено условие (14). Тогда для любых* $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{M}$ *при некотором* $\tau = \tau(u_0, u_1) > 0$ *существует единственное решение* $u \in C^\infty\big((-\tau, \tau), \mathfrak{M}\big)$ *задачи (1) - (3).*

В работе также исследована математическая модель (1), (3), (13). В силу теоремы 3 доказана

Теорема 6. (2.4.2) *Пусть* $m > n/2 - 2$ *и выполнено условие (14). Тогда для любых* $u_0, u_1 \in \mathfrak{U}$ *при некотором* $\tau = \tau(u_0, u_1) > 0$ *существует единственное решение* $u \in C^\infty((-\tau, \tau), \mathfrak{U})$ *задачи (1), (3), (13).*

В п. 2.5 описан алгоритм численного решения системы уравнений Буссинеска с условиями Шоуолтера – Сидорова – Дирихле и Коши – Дирихле, приведены блок-схема и описание программы «Моделирование колебаний в молекуле ДНК».

В п. 2.6 приведены результаты одного из вычислительных экспериментов. В качестве модельного примера рассматривается задача

$$\begin{cases} (4 + \Delta)\ddot{u} = \Delta u - \Delta v^2(x, t), \\ (4 + \Delta)\ddot{v} = -\Delta v^3(x, t), \end{cases} \tag{16}$$

$$
\begin{aligned}
&(4+\Delta)(u(x,0)-2\sin x-3\sin 2x)=0,\\
&(4+\Delta)(\dot u(x,0)-2\sin x-\sin 2x)=0,\\
&(4+\Delta)(v(x,0)-0)=0,\\
&(4+\Delta)(\dot v(x,0)-\sin x-\sin 2x)=0,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$u(0,t)=v(\pi,t)=0. \tag{18}$$

В данном примере искомые функции u и v определяют, соответственно, продольные и поперечные деформации молекулы, а нелинейность представляет собой потенциал Тоды. Неизвестные функции находятся в виде галеркинских сумм $\tilde u(x,t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum\limits_{k=1}^{N}u_k(t)\sin(kx)$, $\tilde v(x,t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum\limits_{k=1}^{N}v_k(t)\sin(kx)$. График приближенного решения задачи (16) – (18) при $N=3$ приведен на рисунках 1 и 2.

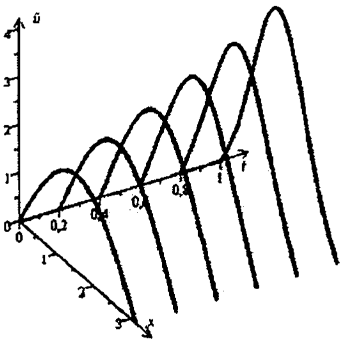

Рис. 1. График функции $\tilde u(x,t)$

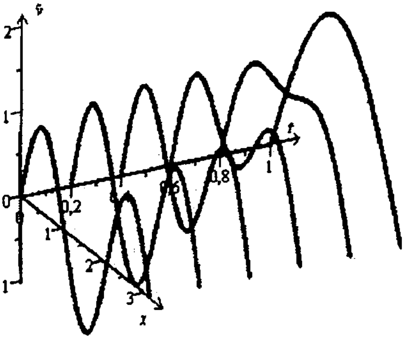

Рис. 2. График функции $\tilde v(x,t)$

Третья глава посвящена математической модели продольных колебаний в тонком упругом стержне, которая рассматривается в рамках задачи Коши для полного полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка. В п. 3.1 рассматривается задача (7), (12), причем оператор A имеет нетривиальное ядро и оператор B_1 ненулевой. Вводится условие

$$(\mathbb{I}-Q)(B_0+N'_{u_0}):\mathfrak{U}^0\to\mathfrak{F}^0 \text{ – топлинейный изоморфизм.} \tag{19}$$

В работе показано, что множество $\mathfrak{M}=\{u\in\mathfrak{U}:(\mathbb{I}-Q)(B_0u+N(u))=0\}$ является банаховым C^∞-многообразием в точке u_0 и доказана

Теорема 7. (3.1.1) *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ $(A,0)$-ограничен, выполнено условие (A), оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и выполнено условие (19). Тогда для любой пары $(u_0,u_1) \in T\mathfrak{M}$ существует единственное локальное решение задачи (7), (12), лежащее в $\mathfrak{M}$ (т.е. множество $\mathfrak{M}$ является локально фазовым пространством уравнения (12)).*

В п. 3.2 рассматривается математическая модель (9) – (11) продольных колебаний в упругом стержне с учетом инерции на основе задачи Коши – Дирихле для уравнения Буссинеска – Лява. Редуцируем математическую модель (9) – (11) к задаче (7), (12), для этого положим

$$\mathfrak{U} = \{u \in W_2^{m+2}(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{F} = W_2^m(\Omega),$$

формулами

$$A = \lambda - \Delta, \quad B_1 = \alpha(\Delta - \lambda'), \quad B_0 = \beta(\Delta - \lambda''), \quad N(u) = \Delta f(u)$$

зададим операторы из уравнения (12). В работе показано, что оператор, определенный формулой $N(u) = \Delta f(u)$ при $m > n/2 - 2$, будет принадлежать классу C^∞ (лемма 2.2.2). В силу теоремы 6 справедлива

Теорема 8. (3.2.1) *(i) Если $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, $m > n/2 - 2$. Тогда для любых $u_0, u_1 \in \mathfrak{U}$ и некоторого $\tau = \tau(u_0,u_1) > 0$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-\tau,\tau),\mathfrak{U})$ задачи (9) – (11).*

(ii) Если $\lambda = \lambda' = \lambda_l \neq \lambda''$, $m > n/2 - 2$ и выполнено условие (19). Тогда для любой пары $(u_0,u_1) \in T\mathfrak{M}$ и некоторого $\tau = \tau(u_0,u_1) > 0$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-\tau,\tau),\mathfrak{M})$ задачи (9) – (11).

В п. 3.3 рассматривается математическая модель (9), (10) с условиями Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda - \Delta)(u(x,0) - u_0) = 0, \quad (\lambda - \Delta)(\dot{u}(x,0) - u_1) = 0. \tag{20}$$

В качестве вспомогательной рассматривается задача (12), (13). На основе теоремы о локальной разрешимости задачи (12), (13) доказана

Теорема 9. (3.3.2) *Пусть $m > n/2 - 2$, $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ или $((\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda' \neq \lambda''))$ и выполнено условие (19). Тогда для любых $u_0, u_1 \in \mathfrak{U}$ существует единственное локальное решение задачи (9), (10), (20).*

В п. 3.4 описан алгоритм решения задачи Шоуолтера – Сидорова с краевыми условиями Дирихле для уравнения Буссинеска – Лява. Приведены блок-схема и описание программы «Программа численного решения задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения Буссинеска – Лява», реализующей данный алгоритм.

В п. 3.5 представлены вычислительные эксперименты. Например, на рисунке 3 приведен график приближенного решения модельной задачи

$$(-9-\Delta)\ddot{u} = (\Delta + 9)\dot{u} + \Delta u + \Delta(u^3), \tag{21}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &(-9-\Delta)(u(x,0) - \sin x + 2\sin 2x - 3\sin 3x) = 0, \\ &(-9-\Delta)(\dot{u}(x,0) - 5\sin x) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

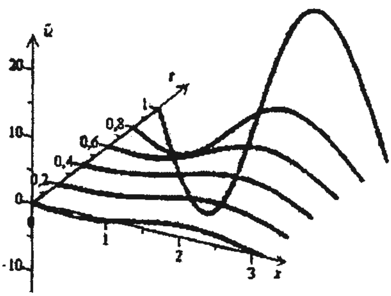

Рис. 3. График приближенного решения задачи (21)–(23)

Для проверки адекватности работы алгоритма было проведено сравнение аналитического решения задачи (9), (10), (20) и приближенного решения в случае, когда уравнение (9) линейное при различных начальных условиях, причем полученное приближенное решение близко к аналитическому.

В заключении представлены выводы по результатам исследований и обосновывается соответствие работы паспорту специальности 05.13.18.

В приложении представлены свидетельства о регистрации программ «Программа решения задачи Шоуолтера - Сидорова для уравнения Буссинеска Лява» и «Моделирование колебаний в молекуле ДНК».

Результаты выносимые на защиту:

1. Разработан новый метод исследования математических моделей, основанных на полулинейных уравнениях соболевского типа второго порядка.
2. Исследована математическая модель распространения волн на мелкой воде и описано фазовое пространство уравнения Буссинеска.
3. Исследована математическая модель колебаний в молекуле ДНК и описано фазовое пространство системы уравнений Буссинеска.
4. Исследована математическая модель Буссинеска – Лява и описано фазовое пространство полулинейного уравнения Буссинеска – Лява.

5. Разработаны и реализованы в виде программ для ЭВМ алгоритмы методов численного решения задачи Шоуолтера – Сидорова – Дирихле для системы уравнений Буссинеска и полулинейного уравнения Буссинеска – Лява.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих российских рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Бычков, Е.В.* Численное моделирование продольных колебаний в диспергирующих средах / Е.В. Бычков // Ученые записки Петрозавод. гос. ун-та. Серия: «Естественные и технические науки». – 2012. – Т. 1, №8 (129). – С. 116–118.

2. *Замышляева, А.А.* Фазовое пространство полулинейного уравнения Буссинеска / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 18 (277), вып. 12. – С. 13–19.

3. *Замышляева, А.А.* О численном исследовании математической модели распространения волн на мелкой воде / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, № 1. – С. 27–34.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ:

4. Программа численного решения задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения Буссинеска – Лява: свидетельство № 2012618477 / Бычков Е.В. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 201261592; заявл. 2.08.2012; зарегистр. 19.09.2012, реестр программ для ЭВМ.

5. Моделирование колебаний в молекуле ДНК: свидетельство № 2013611741 / Замышляева А.А., Бычков Е.В. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2012661363; заявл. 19.12.2012; зарегистр. 04.02.2013, реестр программ для ЭВМ.

Другие научные публикации:

6. *Бычков, Е.В.* Задача Шоуолтера – Сидорова – Дирихле для системы уравнений Буссинеска / Е.В. Бычков // Вестик МаГУ. Серия: «Математика». – 2012. – Вып. 14. – С. 23–31.

10-2

7. *Бычков, Е.В.* Численное решение задачи Шоуолтера – Сидорова – Дирихле для уравнения Буссинеска – Лява / Е.В. Бычков // Измерения: состояние, перспективы развития: тез. докл. междунар. науч.-практ. конф., г. Челябинск, 25-27 сент. 2012 г. В 2 т. – Челябинск, 2012. – Т. 1. – С. 60–62.

8. *Замышляева, А.А.* Исследование модели продольных колебаний в молекуле ДНК / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Обратные и некорректные задачи: тез. докл. конф., посвящ. 80–летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева, г. Новосибирск, 5–12 авг. 2012. – Новосибирск, 2012. – С. 369.

9. *Замышляева, А.А.* Фазовое пространство полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2012: тез. докл. – Воронеж, 2012. – С. 69–71.

10. *Замышляева, А.А.* Фазовое пространство полулинейного уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Обозрение приклад. и пром. математики. – 2012. – Т.19., вып. 2. – С. 256–257.

11. *Замышляева, А.А.* Об одном полулинейном уравнении соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. междунар. конф., посвящ. памяти В.К. Иванова, г. Екатеринбург, 31 окт. – 5 нояб. 2011. – Екатеренбург, 2011. – С. 238–239.

12. *Замышляева, А.А.* Об одном классе полулинейных уравнений соболевского типа / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // СамДиф–2011: конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения», г. Самара, 26–30 июня 2011 г.: тез. докл. – Самара, 2011. –С. 45.

13. *Zamyshlyaeva, A.* The Cauchy Problem for the Second Order Semilinear Sobolev Type Equation / A. Zamyshlyaeva, E. Bychkov // Global and Stochastic Analysis. – 2012. – Vol. 2, no. 1. – P. 159–166.

Типография «Два комсомольца»

Подписано в печать 5.08.13. Формат 60 × 84 1/16.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,87. Уч.-изд. л. 2.
Тираж 150 экз. Заказ 142/456

Отпечатано в типографии «Два комсомольца».
454008, г. Челябинск, Комсосольский пр., 2